WS 2005/06

Oberseminar
Der Modulraum von Hitchin-Paaren

Termin: Di, 10-12

Beginn: 25.10.2005

Wir wollen im Oberseminar den Modulraum von Hitchin-Paaren (zu einer (geeigneten) reduktiven Gruppe G) untersuchen.

Für $G = GL_n$ ist das der Raum von Paaren (E, φ), wo E ein Vektorbündel vom Rang n auf einer fixierten glatten, projektiven Kurve X, und $\varphi\colon E \longrightarrow E \otimes \Omega^1_X$ ein Homomorphismus ist. Es ist leicht zu sehen, dass dieser Raum gerade das Kotangentialbündel des Modulraums von Vektorbündeln vom Rang n auf X ist.

Eine andere Beschreibung ist die als kompaktifizierter 'Picard-Stack' der Spektralkurven; diese werden wir, zumindest in einer ersten Form, in den ersten beiden Sitzungen sehen.

1. Hitchin, *Stable bundles and integrable systems*, [H] (1–2 Sitzungen)

Der Artikel von Hitchin (der zwei Jahre vor [BNR] erschienen ist), betrachtet den Hitchin-Raum, der dort natürlich nicht so heißt, von einem etwas anderen Standpunkt; einiges wiederholt sich aber in [BNR] und wird uns also schon bekannt sein.

Die etwas analytischere Proposition 4.5 (und den Begriff des vollständig integrablen Hamiltonschen Systems) können wir —je nach Geschmack des Vortragenden— auslassen. Insbesondere sollen die Beispiele anderer Gruppen als GL_n in Abschnitt 5 behandelt werden.

2. Beauville, Narasimhan, Ramanan, *Spectral curves and the generalise theta divisor*, [BNR] (2 Sitzungen)

Wir behandeln loc. cit., §2.1, §3 und §4. Nach der kurzen Vorbemerkung in §2.1 werden in §3 die Spektralkurven definiert. Diese Konstruktion wollen wir ausführlich, auch anhand von Beispielen, diskutieren. Besonders wichtig ist Prop. 3.6, die Laumon und Ngô so "umformulieren": Der Modulstack der Hitchin-Paare ist isomorph zum kompaktifizierten Picard-Stack der (universellen) Spektralkurve.

In §4 wird dann Theorem 1 bewiesen. Dabei wird ein Resultat von Drinfeld und Laumon benutzt ([L] Thm. 0.3).

3. Rego, *The compactified Jacobian*, [R], [Altman-Iarobbino-Kleiman]

Eine andere Möglichkeit, die aber mit dem eigentlichen Thema nur indirekt zu tun hat, wäre der Artikel von Rego, der nicht so schwer zu verstehen sein dürfte, aber trotzdem interessant aussieht.

4. Laumon, *Un analogue global du cône nilpotent*, [L]

Eine Möglichkeit hier weiterzumachen, wäre, den Artikel von Laumon zu studieren und den Beweis der in [BNR] benutzten Tatsache nachzutragen. Der Artikel ist allerdings teilweise etwas technisch, und benutzt konsequent die Sprache der algebraischen Stacks (was diejenigen, die diese schon kennen, vielleicht ohnehin als Vorteil auffassen, und die anderen als Anreiz verstehen könnten/müssten, sich darin einzuarbeiten).

5. Donagi, Ein, Lazarsfeld, *Nilpotent cones and sheaves on K3 surfaces*, [DEL]

DIe Autoren zeigen, grob gesprochen, dass das Mukai-System, ein gewisses vollständig integrables System auf einem Modulraum stabiler Garben auf einer K3-Fläche in das Hitchin-System degeneriert, wenn man die K3-Fläche zum Normalenkegel einer glatten Kurve degenerieren läßt.

6. Hausel, Thaddeus, *Mirror symmetry, Langlands duality, and the Hitchin system*, [HT]

Diese Arbeit stellt, wie der Titel sagt, eine Verbindung zur Spiegeltheorie und zur Langlands-Dualität dar.

Die Hitchin-Faserung und Endoskopie ([LN], [N], [D])

Im Seminar zum Fundamentalen Lemma am MPI wird die Arbeit [LN] von Laumon und Ngo studiert.

Literatur

[BNR] A. Beauville, M. S. Narasimhan, S. Ramanan, *Spectral curves and the generalised theta divisor*, J. reine angew. Math. **398** (1989), 169–179. http://www-math.unice.fr/~beauvill/pubs/bnr.pdf

[D] J.-F. Dat, *Lemme fondamental et endoscopie, une approche géométrique (d'après Gérard Laumon et Ngô Bao Châu)*, Séminaire Bourbaki 57ème année, 2004-05, no. **940** (Novembre 2004), http://www.institut.math.jussieu.fr/projets/fa/bpFiles/ExpBou_Dat.pdf

[DEL] R. Donagi, L. Ein, R. Lazarsfeld, *Nilpotent cones and sheaves on K3 surfaces*, in: Birational algebraic geometry (Baltimore, 1996), Comtemp. Math. **207**, AMS 1997, 51–61. (Standort in der Bibliothek: SB 4016)

[F] G. Faltings, *Stable G-bundles and projective connections*, J. Alg. Geom. **2** (1993), 507–568.

[HT] T. Hausel, M. Thaddeus, *Mirror symmetry, Langlands duality, and the Hitchin system*, Invent. Math. **153** (2003), no. 1, 197–229, math.AG/0205236.

[H] N. Hitchin, *Stable bundles and integrable systems*, Dukt Math. J. **54**, no. 1 (1987), 91–114.

[L] G. Laumon, *Un analogue global du cône nilpotent*, Duke Math. J. **57**, no. 2 (1988), 647–671.

[LN] G. Laumon, B. C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les groupes unitaires*, math.AG/0404454.

[N] B. C. Ngô, *Fibration de Hitchin et endoscopie*, math.AG/0406599.

[R] C. J. Rego, *The compactified Jacobian*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4e sêrie, t. **13** (1980), 211-223. Siehe http://www.numdam.org/

[S] C. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety I, II*, Publ. Math. IHES **79** (1994), 47–129 und **80** (1994), 5–79.