Analysis 3

07.01.2019
PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER
Abgabe: 15.01.2019 in der Vorlesung

universitätbonn

Übungsblatt 12

Aufgabe 1: **10 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ derjenige Körper, der durch die durch $y = 1+x^2$, $y = 2$, $z = 0$ und $z = 5$ beschriebenen Flächen begrenzt wird. Sei weiters

$$u(x,y,z) := \sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big(4x^2 - 2yz, x - 2\frac{y}{\cos^2(z)}, 3y + 2\tan(z) - 3xz\Big)^\top .$$

Berechnen Sie

$$\int_{\partial\Omega} u \cdot n \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2,$$

wobei wie gewöhnlich $n \colon \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ das äßere Einheitsnormalenfeld bezeichne.

Im Folgenden betrachten wir die Lebesgueräume L^p ausschließlich bezüglich des d-dimensionalen Lebesguemaßes.

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Seien $1 \le p < q \le \infty$ und $d \in \mathbb{N}$, $d \ge 1$.

(a) Finden Sie ein $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) \setminus \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$.

(b) Finden Sie ein $f \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d) \setminus \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$.

(c) Zeigen Sie: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ messbar mit $m^d(\Omega) < \infty$, so ist $\mathrm{L}^q(\Omega) \subset \mathrm{L}^p(\Omega)$. Wie steht dies in Einklang mit (b)?

Aufgabe 3: **10 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ messbar mit $m^d(\Omega) < \infty$. Sei weiters $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) (i) $f \in \bigcap_{1 \le p < \infty} \mathrm{L}^p(\Omega)$ und (ii) $\sup_{1 \le p < \infty} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} < \infty$.

(b) $f \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

Aufgabe 4: **10 Punkte**

Sei $1 \le p \le \infty$. Wir setzen für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} := \Big(\sum_{n=0}^\infty |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{falls } 1 \le p < \infty,$$
$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |a_n|, \qquad \text{falls } p = \infty$$

und notieren $\ell^p := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} < \infty\}$ sowie $\ell^\infty := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^\infty} < \infty\}$.

(a) Begründen Sie durch Zurückführung auf Lebesgeräume $L^p(\mu)$ (für geeignetes μ), dass die Räume $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ für alle $1 \leq p \leq \infty$ Banachräume sind.

(b) Zeigen Sie, dass $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ für $1 \leq p < \infty$ eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ keine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Tipp zu (c). Angenommen, es gäbe eine solche abzählbare dichte Teilmenge $\{(x_n^{(1)})_n, (x_n^{(2)})_n, ...\}$. Betrachten Sie nun für beliebiges $M \subset \mathbb{N}$ die charakteristische Funktion $\chi_M(n) := 1$ falls $n \in M$ und $\chi_M(n) := 0$ sonst. Zeigen Sie, dass in der $\frac{1}{4}$-Umgebung eines jeden $(x_n^{(j)})_n$ höchstens ein $(\chi_M(n))_n$ liegt. Nutzen Sie dann, dass $\{(\chi_M(n))_n \colon M \subset \mathbb{N}\}$ eine größere Mächtigkeit als $\mathbb{N}$ besitzt.