Analysis 3

30.10.2018
PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER
Abgabe: 06.11.2018 in der Vorlesung

Übungsblatt 4

Aufgabe 1: **2 + 2 + 3 + 3 = 10 Punkte**

Sei $a \in \mathbb{R}^d$ mit $|a| = 1$. Wir definieren für $x \in \mathbb{R}^d$:

$$E_a := \{a\}^\perp := \{y \in \mathbb{R}^d\colon\ \langle a, y\rangle = 0\} \ \text{ und } \ L_x^a := \{x + ta\colon t \in \mathbb{R}\}.$$

Dann ist E_a die zu a orthogonale Ebene und L_x^a diejenige Gerade mit Richtungsvektor a, die durch x läuft. Sei weiters $P_a\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ die orthogonale Projektion auf E_a. Für $A \subset \mathbb{R}^d$ definieren wir

$$S_a(A) := \bigcup_{\substack{b \in E_a \\ A \cap L_b^a \neq \emptyset}} \{b + ta\colon\ |t| < \frac{1}{2} m(\{s \in \mathbb{R}\colon\ b + sa \in A\})\}.$$

(a) Sei speziell $d = 2$ und $A := \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 \leq |x| \leq 1,\ 2 - \sqrt{1 - |x|^2} \leq y \leq 4 - \sqrt{1 - |x|^2}\}$. Zeichnen Sie A in ein kartesisches Koordinatensystem und zeichnen Sie weiters $S_{(0,1)^\top}(A)$ sowie $S_{(1,0)^\top}(A)$ in dasselbe Koordinatensystem ein. Begründen Sie damit anschaulich, dass $S_a\ A$ bezüglich E_a 'symmetrisiert'.

(b) Bearbeiten Sie (a) nun für die Menge $A := \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 \leq y \leq x + 1\}$.

(c) Sei nun $A \subset \mathbb{R}^d$ offen. Zeigen Sie, dass dann $S_a(A)$ offen ist.

(d) Zeigen Sie: Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ konvex, so auch $S_a(A)$ für alle $a \in \mathbb{R}^d$ mit $|a| = 1$.

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Sei $d \geq 1$ und $A \subset \mathbb{R}^d$.

(a) Sei nun speziell $a = e_1 = (1, 0, ..., 0)^\top$. Zeigen Sie, dass dann $\operatorname{diam}(S_{e_1}(A)) \leq \operatorname{diam}(A)$ gilt. Betrachten Sie hierzu für $x = (x_1, x_2, ..., x_d)^\top$ und $y = (y_1, y_2, ..., y_d)^\top$ die Größen

$$a_1 := \inf\{t\colon (t, x_2, ..., x_d)^\top \in A\},\ \ b_1 := \sup\{t\colon (t, x_2, ..., x_d)^\top \in A\},$$
$$a_2 := \inf\{t\colon (t, y_2, ..., y_d)^\top \in A\},\ \ b_2 := \sup\{t\colon (t, y_2, ..., y_d)^\top \in A\}$$

und schätzen Sie Terme der Form $|a_j - b_i|$, $i, j = 1, 2$ geeignet ab.

(b) Verallgemeinern Sie nun die Aussage aus Teilaufgabe (a) wie folgt: Sei $a \in \mathbb{R}^d$ und $|a| = 1$. Zeigen Sie: $\operatorname{diam}(S_a(A)) \leq \operatorname{diam}(A)$. Hierfür dürfen Sie benutzen, dass die orthogonale Projektion P_a auf E_a von der Form $P_a(x) = x - \langle x, a\rangle a$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass für Lebesgue-messbares $A \subset \mathbb{R}^d$ auch $S_a(A)$ Lebesgue-messbar ist mit $m(S_a(A)) = m(A)$. Für die letzte Gleichheit dürfen Sie den Satz von Cavalieri benutzen.

Aufgabe 3: **6 + 3 + 1 = 10 Punkte**

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ nun beliebig und notiere $\{e_1, ..., e_d\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^d$. Mit der Notation von Aufgabe 1 definieren wir rekursiv:

$$A_1 := S_{e_1}(A), \quad A_2 := S_{e_2}(A_1), ..., A_d := S_{e_d}(A_{d-1}).$$

Wir setzen sodann $A^* := A_d$.

(a) Zeigen Sie, dass A_1 zu der Ebene E_{e_1} symmetrisch ist. Schließen Sie durch mehrfache Anwendung des Arguments, dass A^* zu allen Ebenen E_{e_j}, $j = 1, ..., d$, symmetrisch ist; begründen Sie hierfür insbesondere, dass durch diesen rekursiven Prozess bereits erreichte Symmetrien erhalten bleiben. Schlussfolgern Sie, dass A^* zum Ursprung $0 \in \mathbb{R}^d$ punktsymmetrisch ist.

(b) Schließen Sie aus (a), dass A^* in dem abgeschlossenen Ball vom Radius $\mathrm{diam}(A)/2$ um den Ursprung enthalten ist.

(c) Schlussfolgern Sie, dass $m(A) \leq m(\mathrm{B}^{\mathbb{R}^d}_{\mathrm{diam}(A)/2}(0))$.

Aufgabe 4: **4 + 3 + 3 = 10 Punkte**

Sei Ω eine Menge und $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra auf Ω. Zeigen Sie, dass $\mu\colon \Sigma \to [0, \infty)$ genau dann ein Maß auf (Ω, Σ) ist, wenn das Folgende gilt:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) Für alle $A, B \in \Sigma$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(c) Ist $A \in \Sigma$ eine Menge, die als $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ für eine Folge $A_1, A_2, ... \in \Sigma$ mit $A_k \subset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ geschrieben werden kann, so gilt $\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.