Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder Wintersemester 2016/17

Anwesenheitsaufgaben für die Tutorien der 9. Woche
Lineare Algebra 1

**Aufgabe 1.** Betrachte den jeweils angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$ und berechne jeweils die duale Basis der angegebenen Basis $v_1, \dots, v_n$.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (1,1)$;

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (0,1,1)$;

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,2,0)$, $v_3 = (1,2,3)$.

**Aufgabe 2.** Sei $K$ ein Körper und sei $V$ und $W$ jeweils ein $K$-Vektorraum. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathrm{Hom}_K(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(W^*,V^*), \quad f \mapsto f^*$$

$K$-linear ist, wobei für eine $K$-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$, die duale Abbildung $f^*$ gegeben ist durch $f^*(\beta) = \beta \circ f$ für alle $\beta \in W^*$. Ist $\varphi$ injektiv und/oder surjektiv?

**Aufgabe 3.** Sei $K$ ein Körper und sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Zeige, dass

$$V \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(K,V), \quad v \mapsto (a \mapsto a \cdot v)$$

ein Isomorphismus ist.

**Aufgabe 4.** Sei $K$ ein Körper und sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ Vektoren in $V$. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi : V^* \longrightarrow K^n, \quad \beta \mapsto (\beta(v_1), \dots, \beta(v_n))$$

$K$-linear ist. Zeige weiterhin, dass $\varphi$ genau dann ein Isomoprhismus ist, wenn $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von $V$ ist.