Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 12
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Wahr oder Falsch?*
Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$ eine positive natürliche Zahl. Sei weiterhin $A \in M(n \times n, K)$ eine $n \times n$ Matrix über K und sei $b \in K^n$ ein Vektor in K^n. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen.

(a) Falls das Gleichungssystem $GS(A|b)$ genau eine Lösung hat, dann hat für alle $c \in K^n$ das Gleichungssystem $GS(A|c)$ genau eine Lösung.

(b) Falls das Gleichungssystem $GS(A|b)$ keine Lösung hat, dann gibt es ein $c \in K^n$, sodass das Gleichungssystem $GS(A|c)$ mehr als eine Lösung hat.

(c) Falls das Gleichungssystem $GS(A|b)$ mehr als eine Lösung hat, dann ist die Menge aller $c \in K^n$, sodass das Gleichungssystem $GS(A|c)$ mehr als eine Lösung hat ein echter Untervektorraum von K^n.

(d) Sei K ein endlicher Körper mit mehr als zwei Elementen. Wir nehmen weiterhin an, dass das Gleichungssystem $GS(A|b)$ keine Lösung hat. Dann ist die Mächtigkeit der Menge

$$M := \{c \in K^n \mid LS(A|c) = \emptyset\},$$

aller $c \in K^n$ sodass $GS(A|c)$ keine Lösung hat, größer als die Mächtigkeit des Komplements $K^n \setminus M$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Eine Familie von linearen Gleichungssystemen*
Sei K ein Körper. Für $a \in K$ betrachte man die Matrix

$$A_a := \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, K).$$

(a) Berechne in Abhängigkeit von $a \in K$ die Dimension des Lösungsraums $LS(A_a|0)$ des homogenen linearen Gleichungssystems $GS(A_a|0)$.

(b) Betrachte den Vektor

$$b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^4.$$

Berechne in Abhängigkeit von $a \in K$ die Dimension des Lösungsraums $LS(A_a|b)$ des inhomogenen linearen Gleichungssystems $GS(A_a|b)$.

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 27. Januar 2017**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Rechenübungen mit der symmetrischen Gruppe*
Für eine positive natürliche Zahl n betrachte man die symmetrische Gruppe S_n. Wir erinnern, dass ein Element $\tau \in S_n$ eine Transposition ist, falls es natürliche Zahlen i und j mit $1 \leq i < j \leq n$ gibt, sodass τ die Elemente i und j vertauscht und alle anderen Elemente fixiert; explizit bedeutet das, dass $\tau : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Bijektion ist mit $\tau(i) = j$ und $\tau(k) = k$ für alle $k \notin \{i, j\}$.

(a) Sei $\tau \in S_n$ eine Transposition. Berechne das Signum von τ.

(b) Schreibe die folgenden Elemente der symmetrischen Gruppe jeweils als Produkte von Transpositionen und berechne jeweils deren Signum.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$.

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Magische Quadrate*
Sei K ein Körper dessen Charakteristik von 2 und 3 verschieden ist: $\mathrm{char}(K) \notin \{2, 3\}$. Eine 3×3 Matrix $A \in M(3 \times 3, K)$ über K heißt *magisches Quadrat*, wenn alle Zeilensummen, alle Spaltensummen und alle Diagonalsummen einander gleich sind. Fasse die Menge M aller magischen Quadrate als Teilmenge des K^9 auf.

(a) Zeige, dass M ein K-linearer Untervektorraum von K^9 ist.

(b) Bestimme eine Basis von M.

(c) Wie viele magische Quadrate gibt es über dem Körpern $K = \mathbb{F}_5$ mit 5 Elementen, und wie viele magische Quadrate gibt es über dem Körper $K = \mathbb{F}_7$ mit 7 Elementen?

Allgemeine Bemerkungen:

- **Wichtig:** Die Abgabe ist ab jetzt auch in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte vergessen Sie dabei nicht den **Name und die Nummer des Tutoriums** von jedem Gruppenmitglied auf dem abgegebenen Blatt anzugeben, sodass die Punkte aller Mitglieder richtig eingetragen werden können.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Sätze und Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de).
- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/ag/la2016/LA1.htmpl`

- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden.

  Die Teilnehmer der Tutorien 5, 6, 7 und 8 werden gebeten, die Übungszettel direkt bei Ihrem Tutor während des Freitags Tutoriums von 8:00-10:00 Uhr abzugeben.

- Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.

- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.

- Es wird ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Montags 15:00–18:00 sowie Donnerstags 14:00–17:00 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.

- Mehr Details finden Sie auf der oben genannten Homepage der Vorlesung.