Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 9
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Die duale Basis der kanonischen Basis*
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und betrachte den K-Vektorraum K^n. Für $i = 1, \dots, n$, betrachten wir die Projektion p_i auf die i-te Koordinate:

$$p_i : K^n \longrightarrow K, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i.$$

(a) Zeige, dass $p_1, \dots, p_n \in (K^n)^*$ die duale Basis der kanonischen Basis $e_1, \dots, e_n \in K^n$ ist. (Erinnerung: die kanonische Basis von K^n ist gegeben durch $e_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in})$, wobei $\delta_{ii} = 1$ und $\delta_{ij} = 0$ für $j \neq i$.)

(b) Im Spezialfall $n = 4$ und $K = \mathbb{R}$, betrachte man die Basis

$$v_1 := (1, 0, 0, 0), \quad v_2 := (2, 2, 0, 0), \quad v_3 := (3, 3, 3, 0), \quad v_4 := (4, 4, 4, 4)$$

von $\mathbb{R}^4$ und berechne die zugehörige duale Basis $v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*$ von $(\mathbb{R}^4)^*$. Schreibe dabei jedes Element v_i^* der dualen Basis als Linearkombination von $p_1, \dots, p_4$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Komplemente*
Sei K ein Körper und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum eines K-Vektorraums V.

(a) Zeige, dass es einen Untervektorraum $U' \subset V$ mit $U + U' = V$ und $U \cap U' = \{0_V\}$ gibt. (Ein solcher Untervektorraum U' heißt *Komplement von U in V.*)

(b) Zeige, dass der Untervektorraum U' aus Teil (a) isomorph zu V/U ist. Benutze dies um die Dimension von U' im Fall $\dim_K(V) < \infty$ zu berechnen.

(c) Ist der Untervektorraum U' aus Teil (a) eindeutig durch $U \subset V$ bestimmt?

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Die duale Abbildung*
Sei K ein Körper und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen V und W. Wir betrachten die duale Abbildung

$$f^* : W^* \longrightarrow V^*, \quad \beta \mapsto \beta \circ f.$$

Der Einfachheit halber, nehmen wir im Folgenden $\dim_K(V) < \infty$ und $\dim_K(W) < \infty$ an; die Resultate die in dieser Aufgabe gezeigt werden sollen, gelten aber auch ohne diese Annahme.

(a) Zeige oder widerlege, dass f^* injektiv ist, falls f injektiv ist.

(b) Zeige oder widerlege, dass f^* injektiv ist, falls f surjektiv ist.

(c) Zeige oder widerlege, dass f surjektiv ist, falls f^* injektiv ist.

(d) Zeige oder widerlege, dass f surjektiv ist, falls f^* surjektiv ist.

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 23. Dezember 2016**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Für einen Untervektorraum $U \subset V$ betrachten wir

$$U^{\perp} := \{\beta \in V^* \mid \beta(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Man zeige für Untervektorräume $U_1, U_2 \subset V$:

(a) $U_1^{\perp} \subset V^*$ ist ein Untervektorraum;

(b) $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$;

(c) $\dim_K(U_1) + \dim_K(U_1^{\perp}) = \dim_K(V)$; wie üblich wird hier die Rechenregel $\infty + x = \infty$ für alle $x \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ verwendet.

Wichtig: Am Ende dieses Übungsblattes ist ein griechisches Alphabet angehängt. Bitte machen Sie sich damit vertraut, da griechische Buchstaben im Folgenden oft verwendet werden. (Wenn in der Tabelle zwei Kleinbuchstaben angegeben werden, handelt es sich dabei um Druck- und Schreibschrift.)

Allgemeine Bemerkungen:

- **Wichtig:** Die Abgabe ist ab jetzt auch in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte vergessen Sie dabei nicht den **Name und die Nummer des Tutoriums** von jedem Gruppenmitglied auf dem abgegebenen Blatt anzugeben, sodass die Punkte aller Mitglieder richtig eingetragen werden können.

- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Sätze und Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.

- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de).

- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/ag/la2016/LA1.htmpl`

- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden.

  Die Teilnehmer der Tutorien 5, 6, 7 und 8 werden gebeten, die Übungszettel direkt bei Ihrem Tutor während des Freitags Tutoriums von 8:00-10:00 Uhr abzugeben.

- Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.

- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.

- Es wird ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Montags 15:00–18:00 sowie Donnerstags 14:00–17:00 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.

- Mehr Details finden Sie auf der oben genannten Homepage der Vorlesung.

Tabelle 1: Griechisches Alphabet

Name	**Kleinbuchstabe**	**Großbuchstabe**
Alpha	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ϵ	E
Zeta	ζ	Z
Eta	η	H
Theta	θ, ϑ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
My	μ	M
Ny	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Omicron	o	O
Pi	π	Π
Rho	ρ	R
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	T
Upsilon	υ	Υ
Phi	ϕ, φ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω