

## 1. ERMITTLUNG DES KONVERGENZRADIUS

Der Konvergenzradius kann bei allen erzeugten Aufgaben durch die Cauchy-Hadamard-Formel

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

berechnet werden. Beim Auftreten von Fakultäten hilft die Stirlingsche Formel

$$\log(n!) = n \log(n) - n + o(n) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Wenn Zähler oder Nenner der  $a_n$  Summen sind, werden diese durch das Programm so erzeugt, daß ein Summand die übrigen dominiert. Es genügt dann, diesen Summanden zu betrachten. Zum Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + (n^3)!)z^{n^3}}{n^{6n^3}},$$

wobei wir  $a^{b^c}$  immer als  $a^{(b^c)}$  lesen wollen. Wir haben  $a_k = 0$ , falls  $k$  keine dritte Potenz ist. Die Cauchy-Hadamard-Formel vereinfacht sich also zu

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^3]{|a_{n^3}|}} = \exp\left(-\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |a_{n^3}|}{n^3}\right).$$

Dabei gilt  $a_{n^3} = \frac{n^2 + (n^3)!^2}{n^{6n^3}}$ ,

$$\begin{aligned} \log\left(n^2 + (n^3)!^2\right) &= \log\left((n^3)!^2 \cdot (1 + o(1))\right) = 2 \log((n^3)!) + o(1) \\ &= 6n^3 \log(n) - 2n^3 + o(n^3) \end{aligned}$$

(nach der Stirlingschen Formel) sowie

$$\log |a_{n^3}| = -2n^3 + o(n^3)$$

für  $n \rightarrow \infty$  und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |a_{n^3}|}{n^3} = -2.$$

Der Konvergenzradius ist also  $e^2$ .

Alternativ dazu hätte das Quotientenkriterium angewendet werden können, um ähnlich wie bei der Bearbeitung von Testat 8 für Mathematik für Physiker I, aber jetzt in Abhängigkeit von  $z$ , das Konvergenzverhalten der Reihe zu untersuchen: Für  $z \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{(n+1)^3} z^{(n+1)^3}}{a_{n^3} z^{n^3}} \right| &= \frac{((n+1)^2 + ((n+1)^3)!^2) n^{6n^3} |z|^{(n+1)^3}}{(n^2 + (n^3)!^2) (n+1)^{6(n+1)^3} |z|^{n^3}} \\ &= \frac{(n+1)^{3!^2} |z|^{3n^2+3n+1}}{(n^3)!^2 (n+1)^{3n^2+3n+1}} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{6n^3} \cdot (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Der Quotient

$$\frac{(n+1)^{3!^2}}{(n^3)!^2 (n+1)^{3n^2+3n+1}}$$

ist offenbar  $\leq 1$  und

$$\geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3n^2+3n+1},$$

nach der Taylorschen Formel  $\log(n/(n+1)) = -1/n + O(1/n^2)$  gilt also

$$\begin{aligned} \log \frac{(n+1)^{3!^2}}{(n^3)!^2 (n+1)^{3n^2+3n+1}} &= O(n) \\ \log \left(\frac{n}{n+1}\right)^{6n^3} &= -6n^2 + O(n) \end{aligned}$$

und schließlich

$$\log \left| \frac{a_{(n+1)^3} z^{(n+1)^3}}{a_{n^3} z^{n^3}} \right| = (-6 + 3 \log |z|) n^2 + O(n)$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Der Quotient  $\left| \frac{a_{(n+1)^3} z^{(n+1)^3}}{a_{n^3} z^{n^3}} \right|$  strebt also im Fall  $-6 + 3 \log |z| < 0$  (also  $z < e^2$ ) gegen 0 und für  $-6 + 3 \log |z| > 0$  (also  $z > e^2$ ) gegen  $\infty$ . Die Reihe konvergiert also für  $|z| < e^2$  und divergiert für  $|z| > e^2$ . Der Konvergenzradius ist  $e^2$ , wie zuvor gesehen wurde.

Das Beispiel wurde absichtlich kompliziert gewählt, normalerweise erzeugt das Testatprogramm Beispiele, für die das Wachstumsverhalten der verschiedenen Terme größere Unterschiede aufweist als zwischen  $(n^3)!^2$  und  $n^{6n^3}$ .