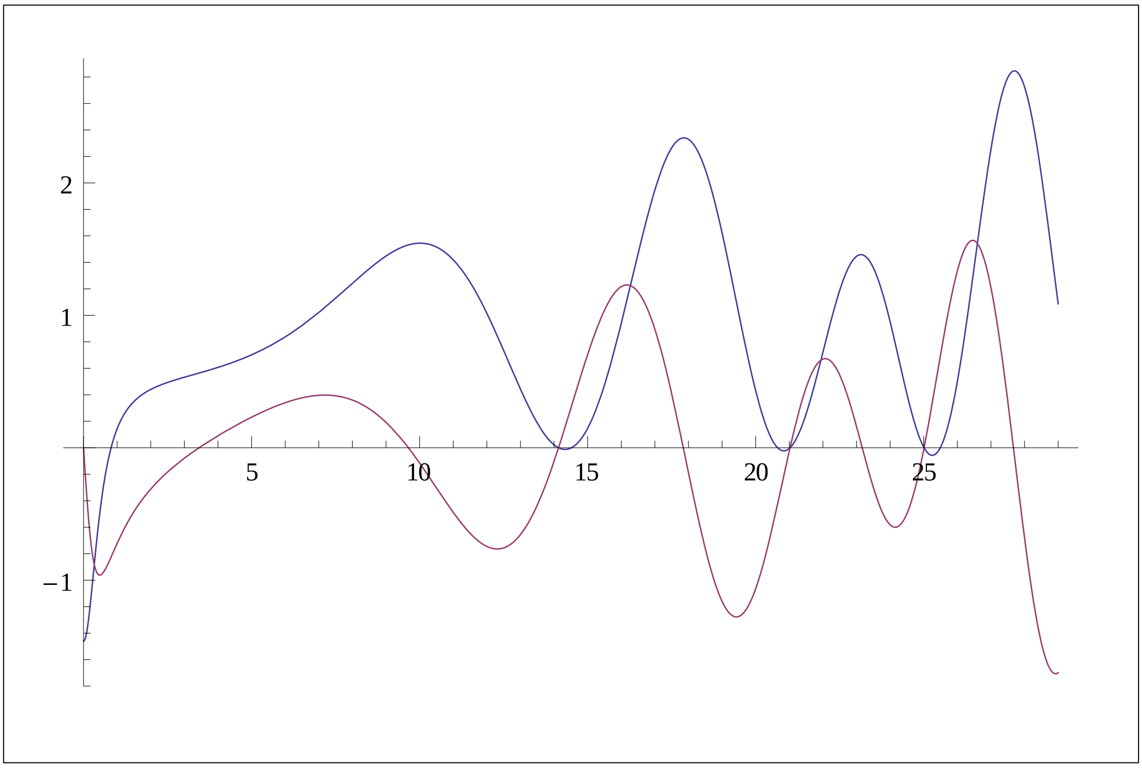
Übungsaufgaben zur Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2014

Blatt 10 Abgabetermin : Montag, 23.6.2014



Real- und Imaginärteil der Funktion $\zeta(1/2 + it)$. Die ersten drei Nullstellen bei $t = 14.13472514\ldots$, $21.02203963\ldots$ und $25.0108575\ldots$ waren bereits Riemann selbst bekannt. Er bemerkte dazu in seinem berühmten Artikel *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* das Folgende: „Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.“ Diese Riemannsche Vermutung ist heute eines der wichtigsten ungelösten Probleme der Mathematik.

Aufgabe 1 (Der Arkustangens im Komplexen)

Es sei $U = \mathbb{C} \setminus \{\lambda i \mid \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \geq 1\}$ die zweimal geschlitzte Ebene.

- Zeige, dass
$$\arctan(z) := \int_{[0,z]} \frac{1}{\xi^2 + 1}\, d\xi$$
eine holomorphe Fortsetzung des Arkustangens von $\mathbb{R}$ nach U definiert, wobei $[0, z]$ den geraden Weg von 0 nach z bezeichnet.

- Zeige, dass
$$\arctan(z) = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}$$
mit dem Hauptzweig des Logarithmus gilt.
- Sei $V = \{w \in \mathbb{C} \mid |\Re(z)| < \pi/2\}$. Zeige, dass tan die Menge V biholomorph, mit Umkehrabbildung arctan, auf U abbildet. Hierzu darf $\tan(\arctan(s)) = s$ und $\arctan(\tan(t)) = t$ für $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und $s \in \mathbb{R}$ als bekannt vorausgesetzt werden.

Aufgabe 2 (Wachstumsverhalten ganzer Funktionen)
Beweise die folgenden Aussagen:

- Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und $B_r(z_0) \subset U$. Dann gilt die Abschätzung
$$\left| f^{(k)}(z_0) \right| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|\,.$$
- Die ganze Funktion f genüge der Wachstumsbedingung
$$|f(z)| \leq C\,|z|^k\,.$$
Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq k$. Folglich ist jede ganze, auf $\mathbb{C}$ beschränkte Funktion konstant (was als Satz von Liouville bekannt ist).

Aufgabe 3 (Fundamentalsatz der Algebra)
Es sei $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ ein komplexes Polynom. Beweise die folgenden Aussagen:

- Ist $a_n \neq 0$, so gilt
$$|p(z)| \geq \frac{|a_n|}{2}\,|z|^n$$
für
$$|z| \geq \max\left\{1, \frac{2}{|a_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right\}.$$
Insbesondere strebt damit $1/p(z)$ für $|z| \to \infty$ gleichmäßig gegen 0.
- Besitzt p in $\mathbb{C}$ keine Nullstelle, so ist p konstant.

Aufgabe 4 (Die Gammafunktion)
Für $\Re(z) > 0$ sei
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^z e^{-t} \frac{dt}{t}.$$

- Zeige, dass $\Gamma(z)$ in $\Re(z) > 0$ holomorph ist.
- Zeige, dass für $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Gleichung $\Gamma(n+1) = n!$ gilt.
- Zeige, dass sich $\Gamma(z)$ holomorph nach $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ fortsetzen lässt.

***Aufgabe 5** (Die Riemannsche Zetafunktion)
Sei $a_n \in \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wir nennen das Produkt $\prod_n a_n$ konvergent, wenn die Folge
$$A_N := \prod_{n=1}^{N} a_n$$
konvergiert und wir nennen das Produkt absolut konvergent, wenn die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$$
absolut konvergiert.

- Das Produkt $\prod_n a_n$ sei absolut konvergent. Zeige, dass für genügend große N die Reihe

$$\sum_{n=N}^{\infty} \log(a_n)$$

mit dem Hauptzweig des Logarithmus wohldefiniert und absolut konvergent ist. Folgere, dass

  1. jedes absolut konvergente Produkt konvergent ist. (Tipp: Zeige mittels Taylor-Approximation, dass eine Konstante C existiert, sodass $|\log(z)| \leq C\,|z-1|$ für alle z mit $|z-1| \leq \frac{1}{2}$ gilt.)
  2. ein absolut konvergentes Produkt genau dann den Wert 0 besitzt, wenn wenigstens einer der Faktoren a_n verschwindet.

- Zeige, dass die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

für $\Re(s) > 1$ konvergiert und in diesem Bereich eine holomorphe Funktion definiert.

- Zeige, dass für $\Re(s) > 1$

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}$$

gilt, wobei das Produkt über alle Primzahlen p zu nehmen ist, und folgere, dass $\zeta(s)$ in $\Re(s) > 1$ keine Nullstelle besitzt. (Tipp: Hinter jedem der Faktoren verbirgt sich eine geometrische Reihe.)

- Zeige, dass für $\Re(s) > 1$

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} t^{-s-1} \lfloor t \rfloor \, dt \tag{1}$$

gilt, wobei $\lfloor t \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq t$ bezeichnet. (Tipp: Unterteile den Integrationsbereich in Intervalle der Form $[n, n+1)$ mit ganzzahligen n.)

- Folgere aus (1), dass

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} t^{-s-1} \{t\} \, dt \tag{2}$$

gilt, wobei $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$ den nichtganzzahligen Anteil von t bezeichnet. Zeige, dass das Integral für $\Re(s) > 0$ konvergiert und dort eine holomorphe Funktion definiert. (Tipp: Betrachte die Funktionenfolge, die durch Einschränkung des Integrationsbereichs auf $[1, n]$ entsteht und zeige, dass diese in $\Re(s) \geq c > 0$ gleichmäßig gegen das Ausgangsintegral konvergiert.)

Somit definiert (2) eine holomorphe Fortsetzung der Zetafunktion nach $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 0\} \setminus \{1\}$.