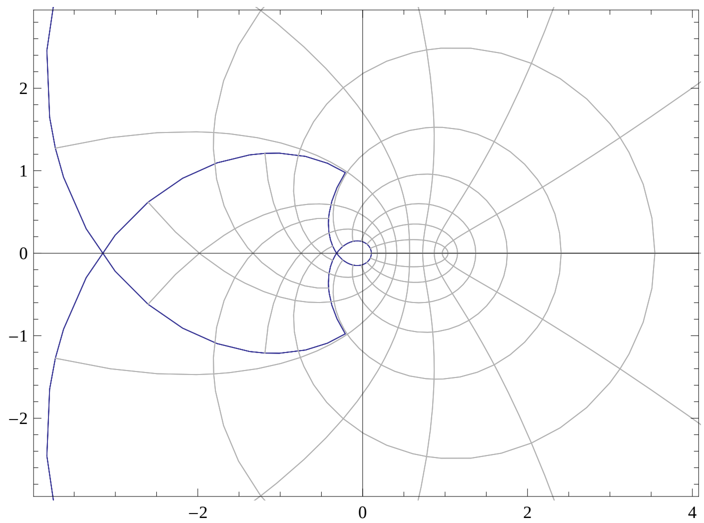
Übungsaufgaben zur Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2014

Blatt 13 Abgabetermin : Montag, 14.7.2014



Das Bild eines Gitters im Quadrat $-3/2 \leq \Re(z), \Im(z) \leq 3/2$ unter der Gaußschen Funktion e^{-z^2}.

Aufgabe 1 (Integralberechnung mit dem Residuensatz)
Berechne die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{\cosh(t)}\, dt; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)^2}{A+\cos(t)}\, dt,\ A>1; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t+2}{t^4+2t^2+1}\, dt.$$

Aufgabe 2 (Holomorphe Logarithmen und Wurzeln)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, d. h. es existiere ein $z_0 \in U$ derart, dass für jedes $z \in U$ die Verbindungsgerade $[z_0, z]$ ganz in U enthalten ist. Sei nun $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei.

- Sei $A \in \mathbb{C}$ so gewählt, dass $f(z_0) = \exp(A)$ gilt. Zeige, dass

$$g(z) = \int_{[z_0,z]} \frac{f'}{f}(\xi)\, d\xi + A$$

in U eine holomorphe Funktion mit

$$f(z) = \exp(g(z))$$

definiert. Man nennt eine derartige Funktion einen holomorphen Logarithmus von f in U.

- Eine holomorphe Funktion $w\colon U \to \mathbb{C}$ heißt holomorphe n-te Wurzel von f in U, falls $w(z)^n = f(z)$ für alle $z \in U$ gilt. Zeige, dass f in U genau n verschiedene n-te Wurzeln besitzt.

Aufgabe 3 (Satz von Rouché)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, seien $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $D_R(a)$ eine offene Kreisscheibe mit $\overline{D_R(a)} \subset U$. Gilt dann

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

für alle $z \in \partial D_R(a)$, so haben f und g in $D_R(a)$ die gleiche Anzahl von Nullstellen (gezählt mit Vielfachheit). (Tipp: Betrachte die Hilfsfunktionen $h_t(z) = f(z) + t(g(z) - f(z))$ mit $t \in [0,1]$.)

Aufgabe 4 (Satz von Hurwitz)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n\colon U \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen, die in U gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei ferner $\overline{D_R(a)} \subset U$ eine abgeschlossene Kreisscheibe auf deren Rand f nirgends verschwinde. Zeige, dass eine natürliche Zahl n_0 existiert, sodass die Anzahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheit) von f_n in $\overline{D_R(a)}$ für alle $n \geq n_0$ mit der von f übereinstimmt.

***Aufgabe 5** (Das Gaußsche Fehlerintegral)
Sei a eine Quadratwurzel aus πi und sei

$$h(z) = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}}.$$

Zeige, dass $h(z) - h(z+a) = e^{-z^2}$ gilt und folgere daraus mit dem Residuensatz

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}.$$