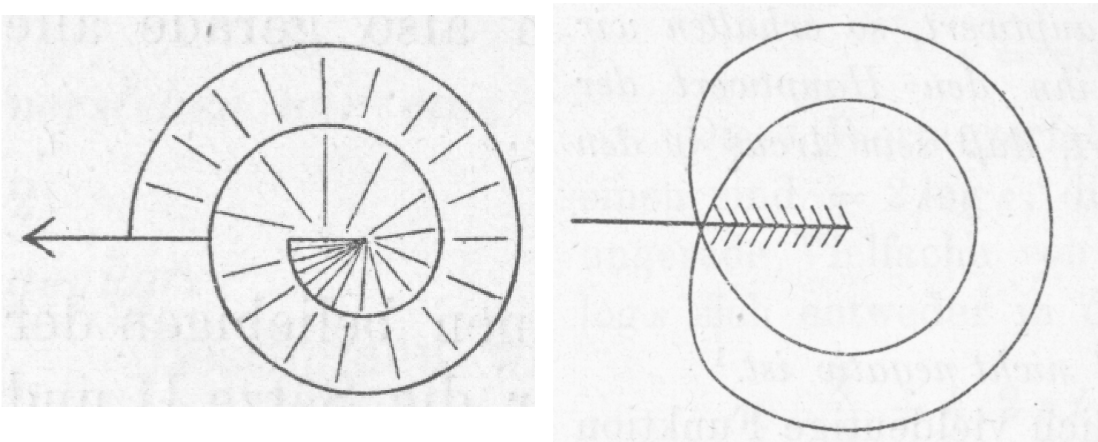
Übungsaufgaben zur Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2014

Blatt 5 Abgabetermin : Montag, 12.5.2014



Skizze der Riemannsche Fläche des Logarithmus (links) und der Quadratwurzel (rechts): „Man denke sich in der Ebene einen im Nullpunkt beginnenden unbegrenzten Radius, der von einer bestimmten Anfangslage (etwa $\varphi = -\pi$) aus sich in positivem Sinne um den Nullpunkt dreht und durch diese seine Bewegung ein Flächenstück beschreibt. Wenn er in die Anfangslage zurückgelangt ist, hat die erzeugte Fläche zwei dicht nebeneinander liegende Ränder. Diese sollen nun aber nicht miteinander verschmelzen, sondern der vorschreitende Rand soll sich über den festen wegschieben und seine drehende Bewegung im selben Sinne wie bisher weiter fortsetzen, indem er dabei das fortwährend sich ausdehnende Flächenstück hinter sich her schleppt. Wir lassen diesen vorschreitenden Rand noch einen zweiten Umlauf machen, dann aber das unter ihm liegende Flächenstück durchsetzen und sich mit dem noch tiefer liegenden Anfangstück vereinigen.“ (Aus H. Burkhardt, *Funktionentheorie*, 1903)

Aufgabe 1 (Kettenregel)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma\colon [0,1] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg. Drücke die Ableitung

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))$$

durch γ' und f' aus.

Aufgabe 2 (Ausdehnung von Kurven)
Es sei $\gamma\colon]0,1[\to \mathbb{C}$ ein Weg. Wir wollen versuchen, γ durch den Ansatz

$$f(x,y) = \gamma(x) + \Psi(x,y)\gamma'(x) + i\Phi(x,y)\gamma'(x),$$

wobei $\Psi(x,0) = \Psi_y(x,0) = \Phi(x,0) = 0$ gelte, zu einer holomorphen Funktion fortzusetzen. Formuliere dafür notwendige Bedingungen an die Ableitungen von Φ und Ψ. Löse das Problem explizit für $\gamma(t) = t^2$.

Aufgabe 3 (Potenzreihenentwicklung)
Entwickle die folgenden Funktionen um die jeweils angegebenen Punkte in Potenzreihen und bestimme ihren Konvergenzradius:

$$\frac{1}{z^3 - iz^2 - z + i} \text{ um 0 und um 2,} \qquad \frac{z^4 - z^3 - 8z^2 + 14z - 3}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2} \text{ um 0 und um } i.$$

Aufgabe 4 (Wirtingerkalkül) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $C^1(\Omega;\mathbb{C})$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der stetig partiell differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf Ω. Wir definieren die Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

auf $C^1(\Omega;\mathbb{C})$. Beweise die folgenden Aussagen:

1. $\partial/\partial z$ und $\partial/\partial\overline{z}$ sind $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen und es gelten die Produkt und Quotientenregel.
2. Es gilt $\overline{\partial f/\partial\overline{z}} = \partial\overline{f}/z$ und $\partial\overline{f}/\partial\overline{z} = \overline{\partial f/\partial z}$.
3. $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph in Ω, wenn $\partial f/\partial\overline{z} = 0$ und $\partial f/\partial z = f'$ gilt.
4. $\overline{f}$ ist genau dann holomorph in Ω, wenn $\partial f/\partial z = 0$ und $\partial\overline{f}/\partial\overline{z} = \overline{f}'$ gilt.
5. Ist $f = u + iv$ in Ω differenzierbar, so gilt für die Jacobische Funktionaldeterminante

$$J_f = \det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z}f & \frac{\partial}{\partial \overline{z}}f \\ \frac{\partial}{\partial z}\overline{f} & \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\overline{f} \end{pmatrix} = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$$

wobei $u_x, u_y, \ldots$ die partiellen Ableitungen nach $x, y, \ldots$ bezeichnen.

***Aufgabe 5** (Komplexe Differenzierbarkeit in $\bar{\mathbb{C}}$)
Es seien $U_\infty = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ und $U_0 = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ die üblichen Kartengebiete für $\bar{\mathbb{C}}$. Seien $\kappa_\infty\colon U_\infty \to \mathbb{C}$, $\kappa_\infty(z) = z^{-1}$ für $z \neq \infty$ und $\kappa_\infty(\infty) = 0$, und $\kappa_0\colon U_0 \to \mathbb{C}$, $\kappa_0(z) = z$, die Kartenabblidungen.

Sei nun $\Omega \subset \bar{\mathbb{C}}$ offen und $f\colon \Omega \to \bar{\mathbb{C}}$ stetig. Wir wollen den Begriff der komplexen Differenzierbarkeit im Punkt z_0 auf Ω ausdehnen. Sei $w_0 = f(z_0)$. Wir haben vier Fälle zu unterscheiden: 1. $z_0, w_0 \in U_0$, 2. $z_0 \in U_0$ und $w_0 = \infty$, 3. $z_0 = \infty$ und $w_0 \in U_0$ und 4. $z_0 = w_0 = \infty$. Wir sagen nun, dass in diesen Fällen f im Punkt z_0 komplex differenzierbar ist, wenn f im Punkt z_0 bzw. $\kappa_\infty \circ f$ im Punkt z_0 bzw. $f \circ \kappa_\infty^{-1}$ im Punkt 0 bzw. $\kappa_\infty \circ f \circ \kappa_\infty^{-1}$ im Punkt 0 komplex differenzierbar ist.

1. Sei im obigen Fall U eine hinreichend kleine Umgebung von z_0, sodass $U \setminus \{z_0\}, f(U \setminus \{z_0\}) \subset U_0$ gilt, und sei f in $U \setminus \{z_0\}$ holomorph sowie bei z_0 komplex differenzierbar. Leite aus der Kettenregel eine Formel für die Ableitung von f an der Stelle z_0 her.
2. Zeige, dass jede Möbiustransformation f sich zu einer auf ganz $\bar{\mathbb{C}}$ komplex differenzierbaren Funktion fortsetzen lässt und berechne die Ableitung im Punkt ∞ und im Punkt ζ mit $f(\zeta) = \infty$.
3. Bestimme für die folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich in $\bar{\mathbb{C}}$ und gib an, an welchen Stellen sie komplex differenzierbar sind.

$$\frac{z^{2014}}{z^2+1}, \quad \frac{\sin(z)}{z}, \quad z\cos(1/z).$$