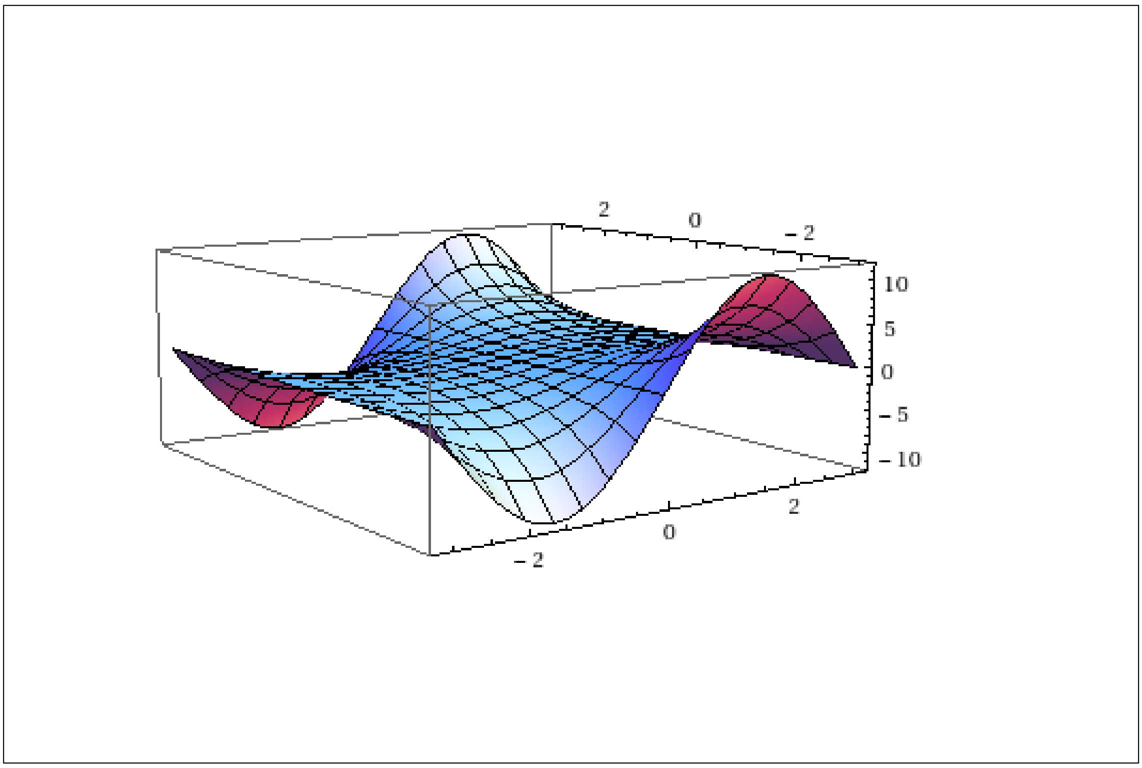
Übungsaufgaben zur Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2014

Blatt 7 Abgabetermin : Montag, 26.5.2014



Die harmonische Funktion $\Re \sin(z)$ auf dem Einheitsquadrat mit allen Maxima und Minima auf dem Rand.

Aufgabe 1 (Konvergenzverhalten von Potenzreihen)

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch eine Potenzreihe gegeben, die in ganz $\mathbb{C}$ gleichmäßig konvergiert. Zeige, dass f ein Polynom ist.

Aufgabe 2

Es sei f in einer Umgebung der 0 durch die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

definiert und es gelte $f'(z) \neq 0$. Zeige, dass f auf einer Umgebung der 0 durch eine analytische Funktion invertierbar ist und gib in Abhängigkeit der a_n eine Rekursionsformel für die Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung

$$f^{-1}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (w - w_0)^n$$

der Umkehrfunktion im Punkt $w_0 = f(0)$ an.

Aufgabe 3 (Ausdehnung von Identitäten)

1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und es gelte $U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Seien $f: U \to V \subset \mathbb{C}$ und $g: V \to U$ analytische Funktionen, sodass $g(f(x)) = x$ für alle $x \in U \cap \mathbb{R}$ gilt. Zeige, dass dann bereits $g(f(z)) = z$ für alle $z \in U$ gelten muss.
2. Zeige, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die Gleichung $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ gilt, wenn sie für reelle z gilt.

Aufgabe 4 (Fortsetzung analytischer Funktionen) Es sei f in $\mathbb{E}$ durch die konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

gegeben. Für jeden Randpunkt $z_0 \in \partial\mathbb{E}$ sei f um z_0 in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar in dem Sinne, dass

$$f_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,z_0}(z - z_0)^n$$

für $|z - z_0| < r_{z_0}$ und ein $r_{z_0} > 0$ konvergiert und $f_{z_0}(z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{E} \cap B_{r_{z_0}}(z_0)$ gilt. Zeige, dass dann ein $r > 1$ existiert, sodass f in $B_r(z_0)$ analytisch ist. Es lässt sich zeigen, dass die Potenzreihe in (1) dann bereits für $|z| < r$ konvergieren muss.

***Aufgabe 5** (Potenzreihen und Partitionen)
Es sei $r(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten, einen Betrag von n Cent mit einer Kombination von 1-Cent-, 2-Cent- und 3-Centstücken zu bezahlen, also die Anzahl der geordneten Tripel (k_1, k_2, k_3) mit $k_1+2k_2+3k_3 = n$.

1. Zeige, dass
$$\sum_{n=0}^{\infty} r(n) z^n = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$$
für $|z| < 1$ gilt.
2. Bestimme die Partialbruchzerlegung der obigen rationalen Funktion, d. h. finde Konstanten $a, b, \ldots, f$ derart, dass
$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)} = \frac{a}{(z-1)^3} + \frac{b}{(z-1)^2} + \frac{c}{z-1} + \frac{d}{z+1} + \frac{e}{z-\omega} + \frac{f}{z-\overline{\omega}}$$
gilt, wobei $\omega = e^{2\pi i/3}$ eine primitive dritte Einheitswurzel bezeichnet.
3. Zeige, dass $r(n)$ die nächste ganze Zahl (mit den üblichen Rundungsregeln) zu $(n+3)^2/12$ ist.