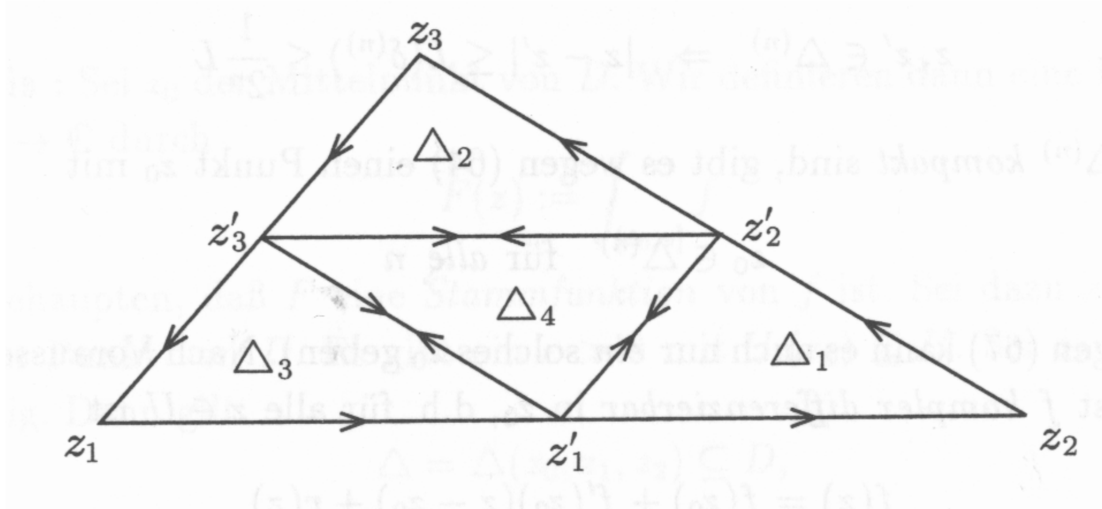
Übungsaufgaben zur Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2014

Blatt 8 Abgabetermin : Montag, 2.6.2014



Ein Zerlegungsschritt im Beweis des Lemmas von Goursat. Aus F. Lorenz: *Funktionentheorie*, Spektrum, 1997. Goursat bewies sein Lemma nicht für Dreiecke, sondern für Rechtecke. Die Dreiecksfassung stammt von Alfred Pringsheim.

Aufgabe 1 (Beispiele für Kurvenintegrale)

Wir kennen die Integrale von z^n (für alle ganzzahligen n) längs der Kreislinie $\gamma(t) = re^{2\pi it}$, $0 \leq t < 1$.

1. Bestimme das Integral von $\Re(z^n)$ und $\Im(z^n)$ längs γ.
2. Bestimme das Integral von $\overline{z}^n$ längs γ.
3. Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ analytisch und es sei $z_0 \in U$. Zeige, dass für jedes $\rho > 0$ mit $B_\rho(z_0) \subset U$ die Gleichung

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} \overline{f(z)}\,dz = 2\pi i\rho^2\,\overline{f'(z_0)}$$

gilt, wenn der Kreis $|z - z_0| = \rho$ positiv durchlaufen wird.

Aufgabe 2 (Das Kurvenintegral von $\overline{z}$)

Es sei γ ein stetig differenzierbarer Weg in $\mathbb{C}$.

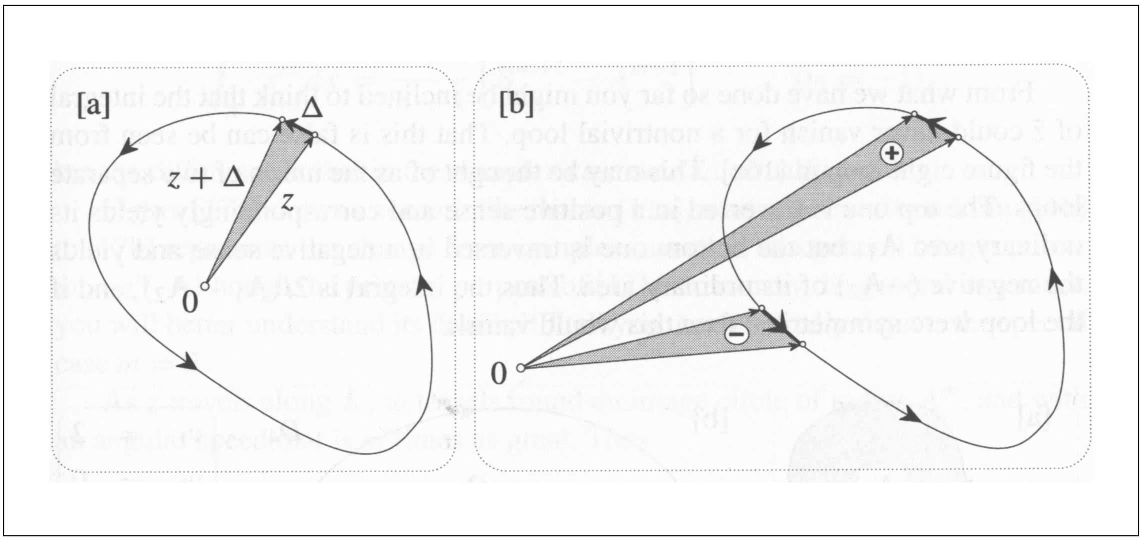
1. Zeige, dass
$$\frac{1}{2}\Im \int_\gamma \overline{z}\,dz \tag{1}$$
gleich der vom Fahrstrahl, d. h. der geraden Linie die 0 und $\gamma(t)$ verbindet, überstrichenen Fläche ist, wobei in positiver Richtung überstrichene Fläche positiv und in negativer Richtung überstrichene Fläche negativ gezählt wird.
2. Sei γ der Rand eines Gebietes Ω. Zeige, dass in diesem Fall das Integral in (1) den Flächeninhalt von Ω ausdrückt.
3. Berechne den Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbachsen $a, b > 0$.

Aufgabe 3 (Standardabschätzung von Kurvenintegralen)
Für einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ definieren wir die Bogenlänge durch
$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$
Sei nun $f\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ stetig und sei γ in U enthalten. Zeige, dass
$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \max_{a\leq t\leq b} |f(\gamma(t))| \cdot L(\gamma)$$
gilt.

Aufgabe 4 (Stammfunktionen auf konvexen Gebieten)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und konvex und sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig, sodass
$$\int_\Delta f(z)\,dz = 0,$$
für alle ganz in U gelegenen Dreiecke Δ gilt. Zeige, dass f in U eine Stammfunktion besitzt. Folgere daraus, dass $\Re(z)$ und $\Im(z)$ auf keiner offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ eine Stammfunktion besitzen.

***Aufgabe 5** (Krümmung von Kurven)
Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare Kurve und es gelte $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$.

1. Zeige, dass sich γ nach der Bogenlänge reparametrisieren lässt. Das heißt, es gibt ein $\tilde{\gamma}\colon [0, L(\gamma)] \to \mathbb{C}$, welches die gleiche Kurve parametrisiert (d. h. es gibt eine monoton wachsende Funktion $s : [a,b] \to [0, L(\gamma)]$ mit $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(s(t))$) und
$$|\tilde{\gamma}'(t)| = 1$$
für alle $t \in]0, L(\gamma)[$ erfüllt.
2. Sei nun γ nach der Bogenlänge parametrisiert. Zeige, dass eine reellwertige Funktion $\kappa(t)$ existiert, welche
$$\gamma''(t) = \kappa(t)\gamma'(t)$$
erfüllt. Die Zahl $\kappa(t)$ heißt die Krümmung der Kurve im Punkt $\gamma(t)$.
3. Sei $C \subset U$ eine durch γ injektiv nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv mit nichtverschwindender Ableitung. Sei $p \in C$ und sei κ die Krümmung der Kurve im Punkt p. Zeige, dass für die Krümmung $\tilde{\kappa}$ der Kurve $\tilde{C} := f(C)$ im Punkt $\tilde{p} = f(p)$ die Gleichung
$$\tilde{\kappa} = \frac{1}{|f'(p)|}\left(\Im\Big(\frac{f''(p)\hat{\xi}}{f'(p)}\Big) + \kappa \right)$$
gilt, wobei $\hat{\xi}$ die Einheitstangente im Punkt p bezeichnet, also $\hat{\xi} = \gamma'(t_p)$, wenn $\gamma(t_p) = p$.



Geometrische Überlegungen zum Kurvenintegral von $\overline{z}$. Aus T. Needham *Visual complex analysis*, Clarendon Press, 1997.