Prof. Dr. Jens Franke
Jan Büthe

Übungsblatt 3

Abgabe am 13.11.2013
in der Vorlesung

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Berechnen Sie die Kurvenintegrale von $\Re(z)$ und $\Im(z)$ entlang des positiv orientierten Kreises mit Mittelpunkt 0 und Radius r.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) = 1/z$ auf jedem offenen Kreis, der den Nullpunkt nicht enthält, eine Stammfunktion besitzt, nicht aber auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Integrieren Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z}$$

entlang der achsenparallelen und positiv orientierten Quadrate mit Schwerpunkt 0 und Seitenlänge 1 und 3.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

die Menge

$$\mathcal{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\Re(z)| \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } |\Re(z)| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Re(z)\Im(z) \geq 0 \right\}$$

bijektiv auf $\mathbb{C}$ abbildet und dass die Umkehrfunktion arcsin auf $\mathbb{C} \setminus \big((-\infty, -1] \cup [1, \infty)\big)$ holomorph ist.

Aufgabe 5 (5 Punkte)**.** Sei P ein Polynom mit komplexen Koeffizienten vom Grad ≥ 2. Ferner gelte $\Im(w) > 0$ für alle Nullstellen w von P. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{P(t)} = 0$$

gelten muss. (Das gleiche gilt, wenn alle Nullstellen $\Im(w) < 0$ erfüllen.)
Hinweis: Nutzen Sie die Tatsache, dass das Kurvenintegral holomorpher Funktionen über geschlossene Kurven verschwindet.