Prof. Dr. M. Rapoport **SS 2016**
A. Mihatsch

Algebra I
11. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei A ein noetherscher Ring, und seien $I, J \subset A$ Ideale.

i) Falls A vollständig bezüglich der I-adischen und J-adischen Topologie ist, dann ist A auch vollständig bezüglich der $I+J$-adischen Topologie.

ii) Falls A vollständig bezüglich der I-adischen Topologie ist, und $J \subset I$ gilt, dann ist A auch vollständig bezüglich der J-adischen Topologie.

Aufgabe 2:

Sei k ein Körper, und sei $A = k[T_1, \dots, T_n]$ der Polynomring in n Unbestimmten über k. Sei $I = (T_1, \dots, T_n)$ das von $T_1, \dots, T_n$ erzeugte Maximalideal. Zeige, dass die I-adische Komplettierung von A mit dem Potenzreihenring $k[\![T_1, \dots, T_n]\!]$ übereinstimmt.

Aufgabe 3:

Sei $\mathbb{Q}_p\{\{T\}\} = \mathbb{Z}_p[\![T]\!] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$. Zeige, dass die $\mathbb{Q}_p$-Algebren $\mathbb{Q}_p\{\{T\}\}$ und $\mathbb{Q}_p[\![T]\!]$ nicht isomorph sind. Folgere, dass Komplettieren im Allgemeinen nicht mit Lokalisieren vertauscht, und dass der lokalisierte Ring nicht notwendig vollständig ist.

Aufgabe 4:

Betrachte den Ring $A = \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^2(1+X))$ und das von den Restklassen von X,Y erzeugte Maximalideal I in A.

i) Skizziere die Lösungen der Gleichung $Y^2 - X^2(1+X) = 0$ im $\mathbb{R}^2$.

ii) Zeige, dass die Vervollständigung $\hat{A}$ von A an I isomorph ist zum Ring $\mathbb{C}[\![S, T]\!]/(ST)$.

Tip: Der Ring $\hat{A}$ entsteht aus $\mathbb{C}[\![X]\!]$ durch formales Hinzufügen einer Wurzel aus $X^2(1+X)$. Zeige, dass das Polynom $X^2(1+X)$ bereits eine Wurzel in $\mathbb{C}[\![X]\!]$ besitzt.

Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt auch, dass die Vervollständigung eines Integritätsbereichs nicht notwendigerweise wieder ein Integritätsbereich ist.

Jede Aufgabe gibt 5 Punkte.

Abgabe: Montag, 04. Juli 2016.