Einführung in die Algebra — Anwesenheitszettel 1

Prof. Dr. Catharina Stroppel, Dr. Martin Palmer-Anghel (Assistent) // Wintersemester 17/18

Aufgabe 1. (Untergruppen)

(a) Gelten für Untergruppen $U_1, U_2 < G$ stets die folgenden Aussagen?
   (i) $U_1 \setminus U_2 < G$
   (ii) $U_1 \cap U_2 < G$

(b) Versuchen Sie, eine prägnante, zu (ii) äquivalente Aussage zu finden.

(c) Gibt es echte Untergruppen $U_1, U_2 < G$ mit $G = U_1 \cup U_2$?

(d) Sei G eine unendliche Gruppe. Zeigen Sie, dass es mindestens eine echte, nicht-triviale Untergruppe $H < G$ gibt.

*(e) Es gilt sogar, dass es unendlich viele solche Untergruppen H gibt.

Aufgabe 2. (Erzeugendensysteme)

(a) Hat jede Gruppe ein Erzeugendensystem?

(b) Bestimmen Sie alle 1-elementigen Erzeugendensysteme von $(\mathbb{Z}, +)$.

(c) Bestimmen Sie alle n-elementigen Erzeugendensysteme von $(\mathbb{Z}, +)$, die nicht verkleinert werden können (d.h. so dass keine $(n-1)$-elementige Teilmenge ein Erzeugendensystem ist).

*(d) Beschreiben Sie ein Erzeugendensystem für die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$. Ist diese Gruppe endlich erzeugt?

Aufgabe 3. (Die Quadratgruppe und die Vorzeichen-Permutation-Gruppen)

(a) Die Quadratgruppe D_4 besteht aus alle Isometrien eines Quadrats. Was ist die *Ordnung* $|D_4|$ dieser Gruppe? Beschreiben Sie ein Erzeugendensystem für D_4.
Hinweis: Betrachten Sie zuerst die Untergruppe aller orientierungserhaltenden Isometrien des Quadrats.

(b) Bestimmen Sie das *Zentrum* $Z(D_4)$ von D_4. Wie viele Untergruppen hat D_4?

(c) Beschreiben Sie ein Erzeugendensystem für die Gruppe WB_n aller Vorzeichen-Permutationen der Menge $\{\pm 1, \ldots, \pm n\}$.

*(d) Das Quadrat hat zwei Diagonalen, die durch eine Isometrie entweder getauscht werden oder auf sich selbst abgebildet werden. Betrachten Sie genauer was mit diesen Diagonalen passiert, wenn eine Isometrie angewandt wird, definieren Sie dadurch einen Gruppenhomomorphismus $D_4 \longrightarrow WB_2$, und zeigen Sie, das dies ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4. (Gruppenhomomorphismen und Gruppenisomorphismen)

(a) Bestimmen Sie alle Gruppenhomomorphismen zwischen folgenden Gruppen (jeweils mit der offensichtlichen Gruppenoperation):

$$\{e\} \qquad \mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Q} \qquad \mathbb{R} \qquad \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

(b) Sei G eine Gruppe mit der Eigenschaft, dass $\langle g \rangle$ endlich ist für jedes Element $g \in G$. Wie viele Gruppenhomomorphismen $G \longrightarrow \mathbb{Z}$ gibt es?

(c) Kann es einen Gruppenisomorphismus zwischen der additiven Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ und der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ geben?
Hinweis: betrachten Sie die Quadratwurzel von 2...

**Wenn ein Teil einer Aufgabe mit dem Symbol $*$ etikettiert wird, zeigt dies, dass er etwas anspruchsvoller sein sollte.*

Aufgabe 5. (Torsionsmengen und Torsionsgruppen)

Sei G eine beliebige Gruppe. Wir definieren eine *Teilmenge* von G:

$$\mathrm{Tor}(G) = \{g \in G \mid \langle g \rangle \text{ ist endlich}\} \ \subseteq \ G.$$

(a) Jetzt sei G abelsch. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tor}(G)$ eine *Untergruppe* von G ist.

*(b) Sei $S_{\mathbb{Z}}$ die Symmetriegruppe von $\mathbb{Z}$, und sei $D_\infty < S_{\mathbb{Z}}$ die Untergruppe von allen Bijektionen $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ so dass $|f(n+1) - f(n)| = 1$ gilt für jede $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tor}(D_\infty)$ *keine* Untergruppe von D_∞ ist.

Aufgabe 6. Sei $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ eine endliche abelsche Gruppe so dass $g^2 \neq e$ gilt für jedes $e \neq g \in G$. Zeigen Sie die Gleichung $g_1 g_2 \cdots g_n = e$.