11.11.2004

תרגיל מס' 4 במושגי יסוד באלגברה לא קומוטטיבית

1. יהי R חוג ו- M מודול מעליו. נאמר, ש- M נתרי (ארטיני) אם כל שרשרת עולה (יורדת) של תת-מודולים של M מתייצבת.

א. הראו כי M נתרי אם ורק אם כל תת-מודול שלו נוצר סופית (כלומר אם $N \subseteq M$, קיימים $x_1,\dots,x_n \in N$ כך ש- $N = Rx_1+\dots+Rx_n$).

ב. הראו כי אם M נתרי אזי כל תת-מודול שלו וכל מודול מנה שלו הם נתריים.

ג. הוכיחו את (ב) בהחלפת "נתרי" ב"ארטיני".

ד. יהיו $P_1,P_2,N \subseteq M$ מודולים כך ש- $P_1 \subseteq P_2$, $P_1 \cap N = P_2 \cap N$ ו- $P_1+N=P_2+N$. הראו כי מכאן נובע $P_1=P_2$.

ה. תהי $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ סדרה קצרה מדויקת של מודולים. הראו כי M נתרי אם ורק אם M' ו- M'' נתריים.

ו. הוכיחו את (ה) בהחלפת "נתרי" ב-"ארטיני".

2. מודולים נתריים ולא ארטיניים (ולהפך)

א. הראו כי $\mathbf{Z}$ כמודול מעל עצמו הוא נתרי אך לא ארטיני.

ב. יהי p ראשוני. הראו כי החבורה האבלית של שורשי היחידה המרוכבים מסדר חזקת p, כלומר $\{z\in\mathbf{C} : \exists n\ge 0 \quad z^{p^n}=1\}$, היא $\mathbf{Z}$-מודול ארטיני אך לא נתרי.

3. תהי K/k הרחבת שדות כך ש- $[K:k]=\infty$. נתבונן בתת-הקבוצה R של $M_2(K)$ המוגדרת ע"י

$$R=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix} : a,b\in K, c\in k\right\}.$$

א. הראו כי R הוא תת-חוג של $M_2(K)$.

ב. הראו כי R, כמודול שמאלי מעל עצמו, הוא נתרי וגם ארטיני.

ג. הראו כי R, כמודול ימני מעל עצמו, אינו נתרי ואינו ארטיני.

ד. הסיקו כי R אינו איזומורפי ל- R^{op}.

4. יהיו M,N,P מודולים מעל חוג קומוטטיבי R. בנו איזומורפיזמים בעזרת התכונה האוניברסלית (כל המכפלות הטנזוריות הן מעל R).

א. $M\otimes N \cong N\otimes M$.

ב. $M\otimes(N\otimes P)\cong(M\otimes N)\otimes P$.

ג. $(M\oplus N)\otimes P\cong(M\otimes P)\oplus(N\otimes P)$

ד. $R\otimes M\cong M$.

5. חשבו את המכפלות הטנזוריות הבאות מעל $\mathbf{Z}$:

א. $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\otimes\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ כאשר $m,n\ge 1$.

ב. $M\otimes\mathbf{Q}$ כאשר M חבורה אבלית פיתולית (לכל $x\in M$ קיים $n\ge 1$ שלם כך ש- $nx=0$).

ג. $\mathbf{Z}^n\otimes\mathbf{Q}$.