18.11.2004

תרגיל מס' 5 במושגי יסוד באלגברה לא קומוטטיבית

1. יהיו $F \subset E$ שדות כך ש- E/F הרחבת גלואה ציקלית מסדר n. יהי $\sigma \in G = Gal(E/F)$ יוצר, כלומר $G = \{1, \sigma, \ldots, \sigma^{n-1}\}$.

יהי $0 \neq \gamma \in F$. נגדיר את האלגברה (E, σ, γ) להיות תת-האלגברה של $M_n(E)$ הנוצרת ע"י המטריצה

$$z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$ וכל המטריצות $$\overline{b} = \begin{pmatrix} b & . & . & . \\ . & \sigma(b) & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & \sigma^{n-1}(b) \end{pmatrix}$$ עבור $b \in E$.

א. הראו כי ההעתקה $b \mapsto \overline{b}$ היא שיכון, ולכן נוכל לזהות את b עם $\overline{b}$.

ב. הראו כי מתקיימים היחסים $z^n = \gamma \cdot I$ ו- $zb = \sigma(b)z$ לכל $b \in E$.

ג. הראו שניתן לכתוב כל איבר ב- (E, σ, γ) בצורה יחידה כ- $b_0 + b_1 z + \ldots + b_{n-1} z^{n-1}$ עם $b_i \in E$.

ד. הסיקו כי $[(E, \sigma, \gamma) : F] = n^2$.

ה. הוכיחו כי (E, σ, γ) אלגברה פשוטה מרכזית מעל F, וכי השדה E משוכן בה.

ו. תארו את האלגברה $(E, \sigma, \gamma) \otimes_F E$.

2. נמשיך בסימוני השאלה הקודמת. יהי $L = End_F E$.

א. הראו כי $\sigma \in L$ (כלומר כי ניתן לחשוב עליו כעל טרנספורמציה F-ליניארית של E).

ב. הראו כי לכל $b \in E$, ההעתקה $x \mapsto bx$ (שתסומן גם כן ב- b) נמצאת ב- L ומתקיים $\sigma \circ b = \sigma(b) \circ \sigma$.

ג. הראו כי תת-האלגברה של L הנוצרת ע"י σ וכל ההעתקות b איזומורפית ל- $(E, \sigma, 1)$.

ד. הסיקו כי $(E, \sigma, 1) \cong M_n(F)$.

ה. נאמר, ש- γ נורמה, אם קיים $c \in E$ כך ש- $\gamma = N_{E/F}(c) = c \cdot \sigma(c) \cdot \ldots \cdot \sigma^{n-1}(c)$. הראו כי אם γ נורמה, אזי האלגבראות (E, σ, γ) ו- $(E, \sigma, 1)$ איזומורפיות.