25.11.2004

תרגיל מס' 6 במושגי יסוד באלגברה לא קומוטטיבית

1. תהי D אלגברת חילוק מרכזית ממימד סופי מעל שדה k.

א. יהי $a \in D$. הראו שההעתקה $\phi : k[x] \to D$ המוגדרת ע"י $\phi(f) = f(a)$ היא הומומורפיזם של חוגים וגרעינה הוא אידיאל הנוצר ע"י פולינום אי-פריק. הפולינום המתוקן היוצר את הגרעין מכונה *הפולינום המינימלי* של a מעל k.

ב. הראו ששני איברים $a, b \in D$ הם צמודים (כלומר, קיים $x \in D^{\times}$ כך ש- $b = xax^{-1}$) אם ורק אם הפולינומים המינימליים שלהם מעל k שווים.

רמז: השתמשו במשפט סקולם-נתר.

ג. תנו דוגמה לכך שהטענה ב-(ב) אינה נכונה אם D פשוטה מרכזית אך אינה אלגברת חילוק.

2. תהי R אלגברה מעל שדה k. *גזירה k-ליניארית* של R היא העתקה k-ליניארית $d : R \to R$ המקיימת בנוסף ש- $d(ab) = ad(b) + d(a)b$ לכל $a, b \in R$.

א. הראו שלכל $c \in R$, ההעתקה $d : R \to R$ המוגדרת ע"י $d(x) = cx - xc$ היא גזירה k-ליניארית. גזירות כאלה מכונות *גזירות פנימיות*.

ב. נניח עתה ש- R פשוטה מרכזית ממימד סופי מעל k. הראו כי כל גזירה k-ליניארית של R היא פנימית.

רמז: הפעילו את משפט סקולם-נתר על שני תת-החוגים הבאים של האלגברה $M_2(R)$:

$\left\{\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} : r \in R\right\}$ ו- $\left\{\begin{pmatrix} r & d(r) \\ 0 & r \end{pmatrix} : r \in R\right\}$ (ראשית הוכיחו שאלה חוגים והם איזומורפיים).

3. בשאלה זו נבנה אלגברה עם חילוק עם מימד אינסופי מעל המרכז שלה.

יהיו L שדה ו- $\sigma : L \to L$ אוטומורפיזם שלו. נגדיר את חוג *טורי לורן המעוקלים* $L((X, \sigma))$:

איברי $L((X, \sigma))$ יהיו ביטויים מהצורה $\sum_{i >> -\infty}^{\infty} a_i X^i$, עם $a_i \in L$ לכל i ו- $a_i = 0$ לכל $i \le n$ כאשר $n \in \mathbf{Z}$ (ייתכן גם שלילי) תלוי בטור.

החיבור יוגדר לפי קואורדינטות: $\sum_i a_i X^i + \sum_i b_i X^i = \sum_i (a_i + b_i) X^i$.

הכפל יוגדר לפי הכלל $Xb = \sigma(b)X$, כלומר $(\sum_i a_i X^i)(\sum_j b_j X^j) = \sum_{i,j} a_i \sigma^i(b_j) X^{i+j}$.

א. הראו כי הפעולות מוגדרות היטב וכי $D = L((X, \sigma))$ היא חוג עם חילוק.

ב. יהי $K = \{a \in L : \sigma(a) = a\}$ שדה השבת של σ. הראו כי אם σ מסדר אינסופי (כלומר σ^n אינו הזהות לכל $n > 0$) אזי $Z(D) \cong K$ ולכן $[D : Z(D)] = \infty$.

ג. הראו כי אם σ מסדר סופי n, אזי $Z(D) \cong K((X))$ (טורי לורן רגילים מעל K) ו- $[D : Z(D)] = n^2$.

ד. ניקח עתה $L = \mathbf{Q}(t)$ שדה הפונקציות הרציונליות מעל $\mathbf{Q}$, ו- $\sigma : L \to L$ ההעתקה המעבירה פונקציה רציונלית $f(t)$ ל- $f(2t)$. הראו כי σ אוטומורפיזם של L מסדר אינסופי וכי שדה השבת שלו הוא $\mathbf{Q}$ (הפונקציות הקבועות). הסיקו ש- $\mathbf{Q}(t)((X, \sigma))$ אלגברת חילוק מרכזית ממימד אינסופי מעל $\mathbf{Q}$.