

תרגיל מס' 9 במושגי יסוד באלגברה לא קומוטטיבית

1. יהי k שדה ותהי G חבורה.
 - א. חוג החבורה $k[G]$ מוגדר כקבוצת הפונקציות $f: G \rightarrow k$ עבורן הקבוצה $\{x: f(x) \neq 0\}$ סופית, עם חיבור נקודתי וכפל ע"י קונבולוציה: $(f * g)(x) = \sum_{y \in G} f(y)g(y^{-1}x)$.
 - הראו שהפעולות מוגדרות היטב ומגדירות על $k[G]$ מבנה של אלגברה אסוציאטיבית מעל k .
 - ב. הראו שניתן לראות את $k[G]$ כמרחב וקטורי מעל k הנפרש ע"י האיברים e_x לכל $x \in G$, כאשר כפל איברי בסיס מוגדר ע"י הנוסחה $e_x e_y = e_{xy}$.
 - ג. אם G_1, G_2 חבורות סופיות, הראו כי $k[G_1 \times G_2] \cong k[G_1] \otimes_k k[G_2]$.
2. יהי k שדה ותהי G חבורה ציקלית.
 - א. הראו כי אם G סופית בת n איברים, האלגברה $k[G]$ איזומורפית לחוג $k[x]/(x^n - 1)$.
 - ב. הראו כי אם G אינסופית, $k[G]$ איזומורפית לחוג פולינומי לורן מעל k , ז.א. פונקציות רציונליות מהצורה $f(x)x^n$ כאשר $f(x)$ פולינום ו- n שלם (ייתכן שלילי).
3. נניח עתה כי k סגור אלגברית וכי G חבורה אבלית מסדר n שאינו מתחלק במציין של k .
 - א. הראו כי $k[G]$ איזומורפית לחוג $k \times k \times \dots \times k$ (n פעמים).
רמז: $k[G]$ פשוטה למחצה.
 - ב. הסיקו כי $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}] \cong \mathbb{C}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$.
 - ג. האם $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}] \cong \mathbb{Q}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$?
4. תהי S_3 חבורת התמורות על שלושה איברים.
 - א. פרקו את החוג $\mathbb{C}[S_3]$ למכפלת חוגי מטריצות.
 - ב. מצאו את כל ההצגות האי-פריקות של S_3 מעל \mathbb{C} .
 - ג. תנו פירוש גיאומטרי להצגה האי-פריקה של S_3 ממימד 2.
5. תהי G חבורה ציקלית מסדר n . תארו את כל ההצגות האי-פריקות של G מעל \mathbb{C} .