

מספר תלמיד:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

מספר מחברת:

--	--	--

26.6.2005

בחינה בקורס "מבנים אלגבריים 2" (80446) מועד א' תשס"ה

המורה: פרופ' דוד קשדן

משך הבחינה: שעתיים

ענו על כל השאלות הבאות. משקל כל שאלה 10 נקודות.
לכל שאלה יש מספר היגדים אפשריים, אך רק אחד מהם נכון. הקיפו בעיגול, על גבי טופס זה, את מספר הסעיף המתייחס להיגד הנכון.

בהצלחה!

1. תהי L/K הרחבה אלגברית, יהי $K \subseteq F \subseteq L$ שדה ביניים ויהי $\alpha \in L$. יהיו $f_F \in F[t]$ הפולינום המינימלי של α מעל F , $f_K \in K[t]$ הפולינום המינימלי של α מעל K . אזי:

א. $\deg f_F \leq \deg f_K$ וגם $f_F \mid f_K$.

ב. $\deg f_F \leq \deg f_K$ אך לא בהכרח $f_F \mid f_K$.

ג. אם $\alpha \notin F$ אזי $\deg f_F = \deg f_K$.

ד. $\deg f_K \leq \deg f_F$ וגם $f_K \mid f_F$.

2. תהי L/K הרחבת שדות כך שקיים $\alpha \in L$ טרנסצנדנטי מעל K . יהי $\beta \in K(\alpha)$ ו- $\beta \notin K$. אזי:

א. $K(\beta)/K$ אלגברית ו- $K(\alpha)/K(\beta)$ אלגברית.

ב. $K(\beta)/K$ אלגברית ו- $K(\alpha)/K(\beta)$ טרנסצנדנטית.

ג. $K(\beta)/K$ טרנסצנדנטית ו- $K(\alpha)/K(\beta)$ אלגברית.

ד. $K(\beta)/K$ טרנסצנדנטית ו- $K(\alpha)/K(\beta)$ טרנסצנדנטית.

3. יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ שני שורשים שונים של הפולינום $t^3 - 3t - 1$. אזי $[\mathbb{Q}(\alpha + \beta) : \mathbb{Q}]$ שווה ל:

א. 2

ב. 3

ג. 6

ד. 9

4. יהי K שדה ממציין ראשוני p , תהי L/K הרחבה אלגברית סופית ויהי $\alpha \in L$ אך $\alpha \notin K$. אזי

בסדרה $\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \dots, \alpha^{p^n}, \dots$:

א. לפחות אחד האיברים נמצא ב- K .

- ב. אף אחד מהאיברים אינו נמצא ב- K .
- ג. לפחות אחד האיברים אי-ספרבילי לחלוטין מעל K .
- ד. לפחות אחד האיברים ספרבילי מעל K .
5. תהי M/K הרחבה סופית של שדות ויהיו $K \subseteq E, L \subseteq M$ שדות ביניים.
- טענה 1:** אם L/K נורמלית אזי LE/E נורמלית.
- טענה 2:** אם L/K גלואה אזי $[LE : E]$ מחלק את $[L : K]$.
- א. טענה 1 נכונה, טענה 2 אינה נכונה.
- ב. טענה 1 אינה נכונה, טענה 2 אינה נכונה.
- ג. טענה 1 אינה נכונה, טענה 2 נכונה.
- ד. טענה 1 נכונה, טענה 2 נכונה.
6. יהיו $K = \mathbf{Q}(\sqrt{6} + \sqrt{11})$ ו- L הסגור הנורמלי של K מעל \mathbf{Q} . אזי:
- א. K/\mathbf{Q} נורמלית ו- $\text{Gal}(K/\mathbf{Q}) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
- ב. K/\mathbf{Q} נורמלית ו- $\text{Gal}(K/\mathbf{Q}) \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$.
- ג. K/\mathbf{Q} אינה נורמלית ו- $\text{Gal}(L/\mathbf{Q}) \cong D_4$ (חבורת הסימטריות של הריבוע).
- ד. K/\mathbf{Q} אינה נורמלית ו- $\text{Gal}(L/\mathbf{Q}) \cong A_4$.
7. יהי $x \in \mathbf{F}_{49}$ איבר כלשהו. אזי:
- א. $x^6 \in \mathbf{F}_7$.
- ב. $x^7 \in \mathbf{F}_7$.
- ג. $x^8 \in \mathbf{F}_7$.
- ד. $x^{49} \in \mathbf{F}_7$.
8. תהי L/K הרחבת שדות ותהי $B : L \times L \rightarrow L$ הפונקציה המוגדרת ע"י $B(x, y) = xy + x^2y^2$. נאמר ש- B תבנית בי-ליניארית אם שני התנאים הבאים מתקיימים:
- B בי-ליניארית כשרואים את L כמרחב וקטורי מעל K .
 - $B(x, y) \in K$ לכל $x, y \in L$.
- א. אם $K = \mathbf{Q}$ ו- $L = \mathbf{Q}(e^{2\pi i/3})$, אזי B היא תבנית בי-ליניארית.
- ב. אם $K = \mathbf{F}_2$ ו- $L = \mathbf{F}_4$, אזי B היא תבנית בי-ליניארית.
- ג. אם $K = \mathbf{F}_2$ ו- $L = \mathbf{F}_8$, אזי B היא תבנית בי-ליניארית.
- ד. אם $L = K = \mathbf{F}_3$, אזי B היא תבנית בי-ליניארית.
9. יהי L שדה הפיצול של הפולינום $t^6 - 2$ מעל \mathbf{Q} . אזי:

עמוד 3 מתוך 3

א. קיימים בדיוק שני שדות ביניים $\mathbf{Q} \subseteq F \subseteq L$ עם $[F : \mathbf{Q}] = 2$.

ב. קיימים בדיוק שלושה שדות ביניים $\mathbf{Q} \subseteq F \subseteq L$ עם $[F : \mathbf{Q}] = 3$.

ג. קיימים בדיוק ארבעה שדות ביניים $\mathbf{Q} \subseteq F \subseteq L$ עם $[F : \mathbf{Q}] = 4$.

ד. קיימים בדיוק שישה שדות ביניים $\mathbf{Q} \subseteq F \subseteq L$ עם $[F : \mathbf{Q}] = 6$.

10. יהי $f \in \mathbf{Q}[t]$ פולינום ממעלה 4 ויהי L_f שדה הפיצול שלו מעל \mathbf{Q} . נסמן ב- $x_1, x_2, x_3, x_4 \in L$ את שורשי f ב- L_f (נניח שכולם שונים זה מזה) וב- Y_f את קבוצת הזוגות (לא-סדורים) של שורשים:

$$Y_f = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}\}$$

תהי $G_f = \text{Gal}(L_f/\mathbf{Q})$.

טענה 1: אם $f(t) = t^4 - 7$, אזי G_f פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה Y_f .

טענה 2: אם $f(t) = t^4 - 2t + 2$, אזי G_f פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה Y_f .

א. טענה 1 נכונה וגם טענה 2 נכונה.

ב. טענה 1 נכונה אך טענה 2 אינה נכונה.

ג. טענה 1 אינה נכונה אך טענה 2 נכונה.

ד. טענה 1 אינה נכונה וגם טענה 2 אינה נכונה.