Dr. M. Welter 26.01.2006

13. Übung
Mathematik für Informatiker Ia
Lineare Algebra
== Wintersemester 2005/06 ==

Abgabe: Donnerstag, den 02.02.2006, vor der Vorlesung **(bis 9 Uhr (s.t.)!)** in den Kasten (Römerstrasse, Neubau, 1. Stock, vor dem Eingang der Empore des Audimax) oder in die **zu Beginn der Vorlesung ausliegenden Mappen**.

- Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet.
- Diese Übung ist nicht mehr relevant für die Klausurzulassung. Der behandelte Stoff ist aber klausurrelevant. Ich empfehle deshalb jedem, die Aufgaben (möglichst schriftlich!) zu bearbeiten.

Aufgabe 1.
Seien K ein Körper und $A \in M_n(K), B \in M_m(K)$. Beweisen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B).$$

Aufgabe 2.
Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in M_3(\mathbb{R})$, so dass $S^{-1}AS$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 3.
Diagonalisieren Sie die Matrizen

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 2 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

aus $M_4(\mathbb{R})$ simultan, d.h. bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in M_4(\mathbb{R})$, so dass $S^{-1}AS$ und $S^{-1}BS$ Diagonalmatrizen sind.

Aufgabe 4.
Beweisen Sie, dass eine Matrix $A \in M_n(K)$ genau dann trigonalisierbar ist, wenn sein charakteristisches Polynom P_A über K vollständig in Linearfaktoren zerfällt, d.h. wenn es (nicht notwendigerweise verschiedene) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gibt, so dass $P_A(t) = \prod_{m=1}^{n}(\lambda_m - t)$ ist.
Hinweis: In der Vorlesung wurde bewiesen, dass jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ trigonalisierbar ist. Verfahren Sie analog. Ausserdem ist Aufgabe 1 dieses Blattes hilfreich.